

Exercice I: Notions fondamentals (7 points)

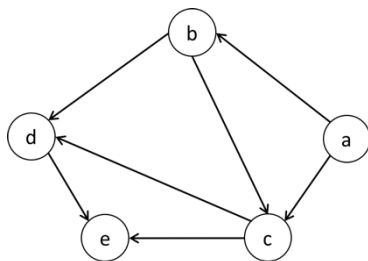
Partie A

Considérons le graphe orienté $G = (V, E)$ où $V = \{a, b, c, d, e\}$ et $E = \{(a, b), (a, c), (b, c), (b, d), (c, d), (c, e), (d, e)\}$.

1. Trouver la matrice d'adjacence et la liste d'adjacence du graphe G. En déduire les degrés sortants et les degrés entrants des sommets.
2. Ce graphe est-il biparti? Pourquoi ou pourquoi pas?
3. Ce graphe est-il eulérien? En déduire en une condition nécessaire pour qu'un graphe dirigé soit eulérien.

solution

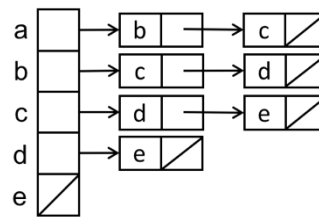
1.



Graph G

	a	b	c	d	e
a	0	1	1	0	0
b	0	0	1	1	0
c	0	0	0	1	1
d	0	0	0	0	1
e	0	0	0	0	0

Adjacency matrix



Adjacency list

vertex	in-degree	out-degree
a	0	2
b	1	2
c	2	2
d	2	1
e	2	0

Degrees

2. G n'est pas biparti car il contient des cycles de longueurs impaires (direction ignorée).
 3. G n'est pas eulerian. Le sommet a 2 arcs entrants et aucun arc sortant. e ne peut pas être visité.
 Un graphe orienté a un circuit d'Euler si et seulement si pour tout v en G , $\text{indeg}(v) = \text{outdeg}(v)$.

readings:

<http://www.bowdoin.edu/~ltoma/teaching/cs231/fall09/Homeworks/old/H9-sol%203.pdf>

<https://math.stackexchange.com/questions/1871065/euler-path-for-directed-graph>

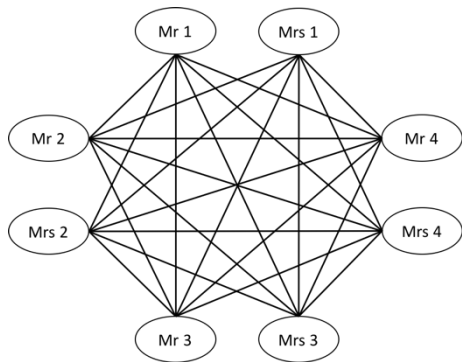
Part B

Quatre couples se sont rencontrés lors d'une conférence, où chacun doit se serrer la main avec les autres, à l'exception de son conjoint.

1. Représenter le problème donné par un graphe où les sommets et les arêtes doivent être déterminés.
2. Le graphe obtenu est-il complet? Eulérien? Hamiltonien? Expliquer.

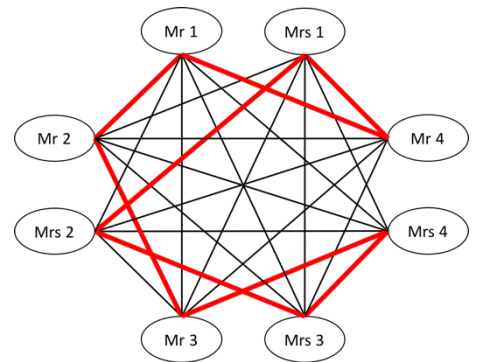
solution

1.



Graph G

vertex = person
edge = shakehand
 $G = (V, E)$

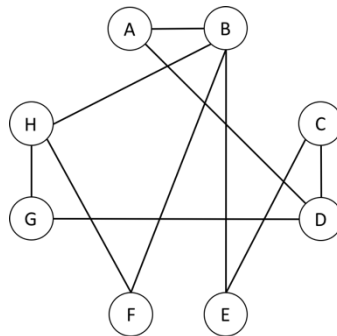


Hamiltonian cycle in G

2. G is regulier mais non complet. Il n'y a pas d'arêtes entre les mariés. G is 6-regulier. Tous les sommets sont de degré 6 (pair). Alors G est Eulerien.
3. G est Hamiltonien. Hamiltonian cycle= Mr1, Mr4, Mrs1, Mrs2, Mrs3, Mrs4, Mr3, Mr2, Mr1. Un tel cycle signifie qu'ils peuvent se serrer la main simultanément (chacun serre la main de ses deux voisins, en utilisant une main pour chacun).

Exercice II: Coloration d'un graphe (6 points)

Considérons le graphe $G = (V, E)$:



1. Maximiser et minimiser le nombre chromatique, $\chi(G)$, de G.
2. En appliquant un algorithme de son choix, proposer une bonne coloration pour les sommets de G.
3. Proposer une bonne coloration pour les arêtes de G.

solution

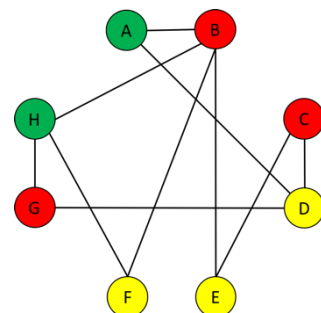
1. Minimisation: il existe un sous-graphe complet de taille 3. Aussi parce qu'il existe un cycle impair. $\Rightarrow \chi(G) \geq 3$. Maximisation: le degré maximum est 4. $\deg(B) = 4 \Rightarrow \chi(G) \leq 5$. Donc, $3 \leq \chi(G) \leq 5$.

2. Algorithme de coloration de Welch et Powell.

vertex coloring

degré	4	3	3	2	2	2	2	2
sommet	B	D	H	A	C	E	F	G
B ← couleur 1, ainsi que C et G								
D ← couleur 2, ainsi que E et F								
H ← couleur 3 ainsi que A								
degré	4	3	3	2	2	2	2	2
sommet	B	D	H	A	C	E	F	G
couleur	1	2	3	3	1	2	2	1

3 couleurs, donc coloration optimale



3. Trouver la coloration minimale des arêtes d'un graphe G équivaut à trouver ua coloration minimal des sommets du graphe linéaire correspondant $L(G)$. Un graphe linéaire $L(G)$ d'un graphe simple G est

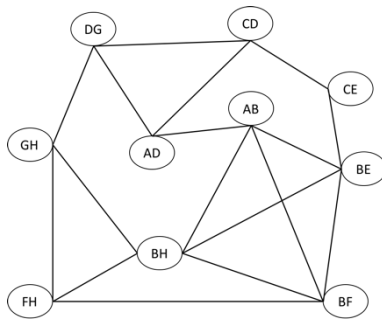
obtenu en associant un sommet à chaque arête du graphe et en reliant deux sommets par un arête si et seulement si les arêtes correspondantes de G ont un sommet en commun..

Minimisation: il existe un sous-graphe complet de taille 4 $\Rightarrow \chi(L(G)) \geq 4$. Maximisation: le degré maximum est 5. $\deg(BH) = 5 \Rightarrow \chi(L(G)) \leq 6$. Donc, $4 \leq \chi(L(G)) \leq 6$.

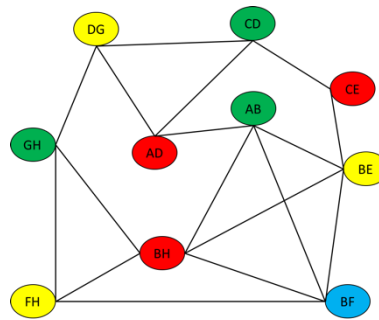
edge coloring of G = vertex coloring of line graph $L(G)$

degré	5	4	4	4	3	3	3	3	3	2
sommet	BH	AB	BE	BF	CD	DG	GH	FH	AD	CE
couleur	1	2	3	4	2	3	2	3	1	1

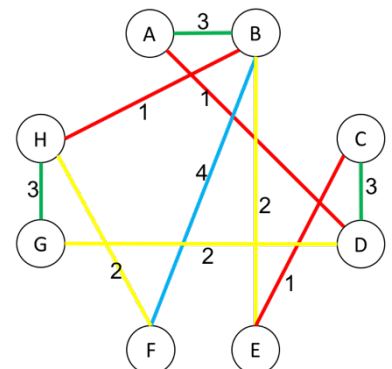
4 couleurs, donc coloration optimale



Line graph $L(G)$



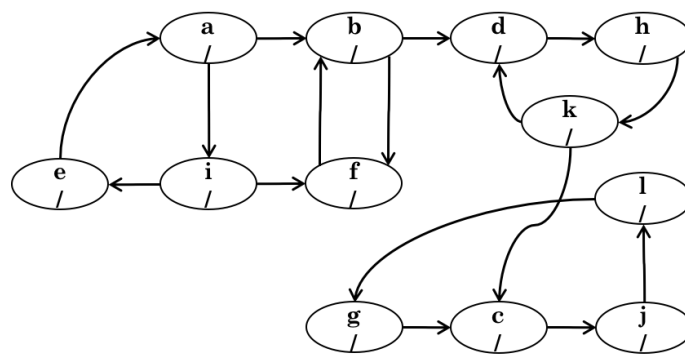
Vertex coloring of $L(G)$



Edge coloring of G

Exercise III: Parcours d'un graphe (7 points)

Considérons le graphe $G = (V, E)$:

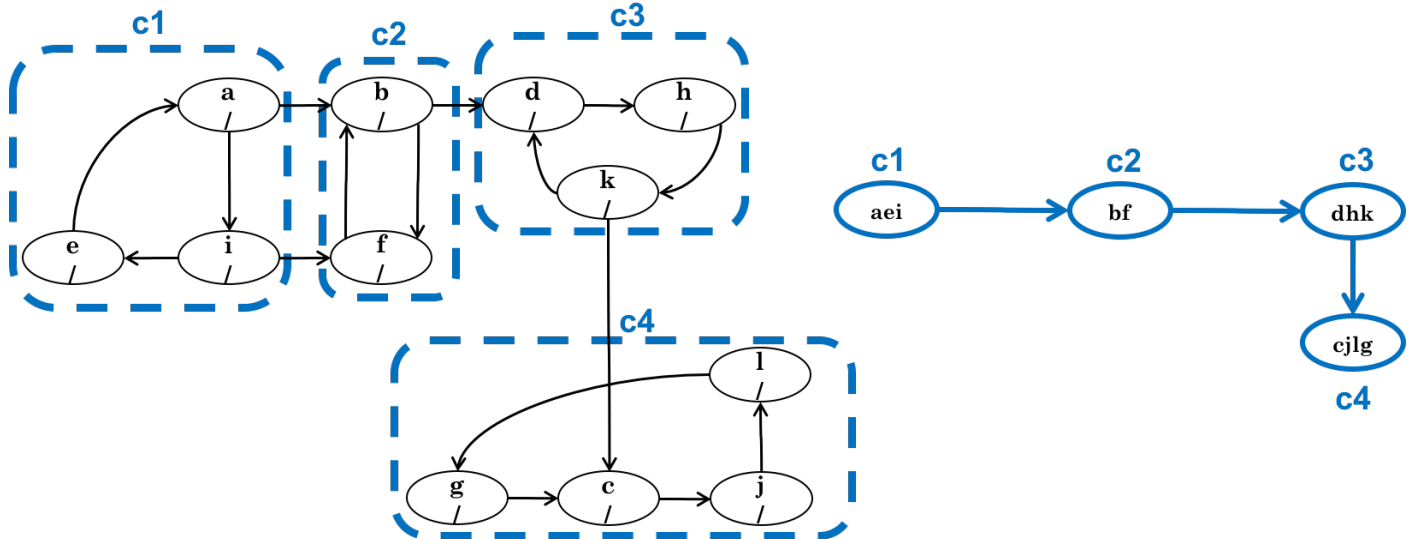


1. Ce graphe est-il fortement connecté? Contient-il des ponts (bridges)? Si oui, donner-les.
2. Dans le cas où le graphe n'est pas fortement connecté, indiquer ses composantes fortement connexes et donner son graphe réduit G_R .
3. Appliquer l'algorithme DFS sur le graphe G en commençant par le sommet a . S'il y a une décision à prendre entre plusieurs sommets, choisir d'abord la lettre la plus proche du début de l'alphabet. Indiquer, pour chaque sommet, le temps de découverte (d) et le temps de finition (f).
4. Dessiner l'arbre de parcours obtenu par DFS. Que remarque-t-on en ce qui concerne les ponts ?

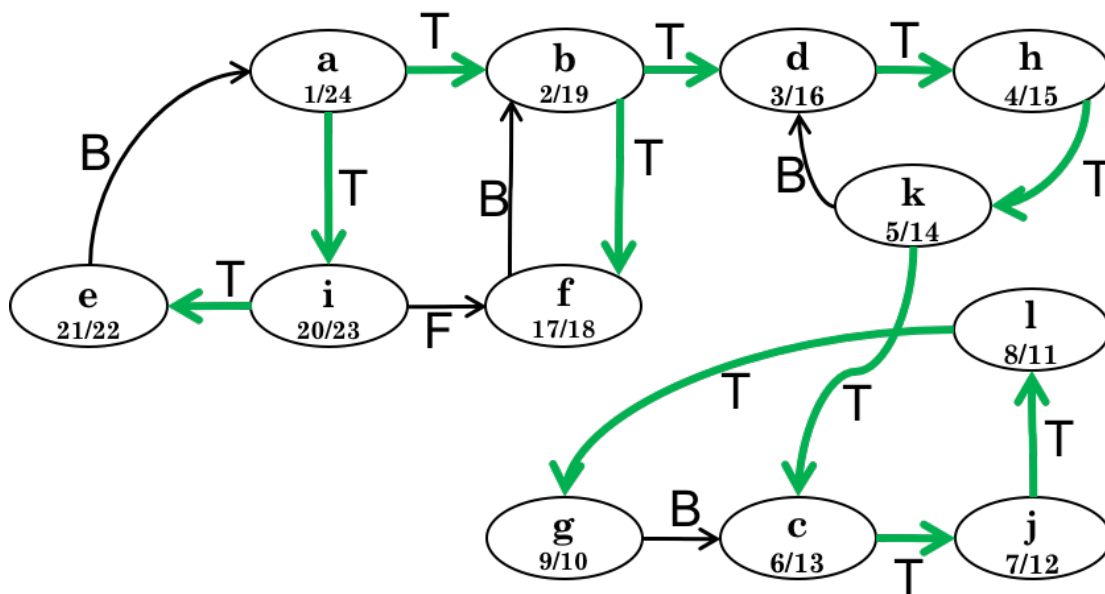
solution

1. G n'est pas fortement connecté. Contre exemple. Il n'y a pas un chemin menant de b à a .
 G contient 2 ponts: (b,d) and (k,c) .

2. G contient 4 composantes fortement connexe $c1, c2, c3, c4$, où:
 $c1 = (E1, V1)$; avec $E1 = \{a, e, i\}$ et $V1 = \{(a, i), (i, e), (e, a)\}$,
 $c2 = (E2, V2)$; avec $E2 = \{b, f\}$ et $V2 = \{(b, f), (f, b)\}$,
 $c3 = (E3, V3)$; avec $E3 = \{d, h, k\}$ et $V3 = \{(d, h), (h, k), (k, d)\}$,
 $c4 = (E4, V4)$; avec $E4 = \{c, j, l, g\}$ et $V4 = \{(c, j), (j, l), (l, g), (g, c)\}$, et
 $G_R = (E_R, V_R)$; with $E_R = \{c1, c2, c3, c4\}$ and $V_R = \{(c1, c2), (c2, c3), (c3, c4)\}$.



3. DFS sur G:



4. DFS sur G: l'arbre de parcours est donné par la figure ci-dessous. On Remarque que les ponts sont des aretes dans l'arbre de type tree edge (arc de liason) n'appartenant pas a un cycle forme par des arcs de retour (backward) ou dd'avant (forward).

